

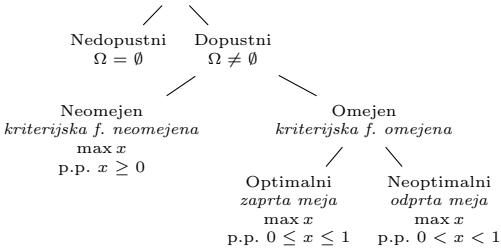
## Optimizacijske naloge

Optimizacijska naloga je  $(\Omega, f, \max/\min/\sup/\inf)$ , kjer je:

- $\Omega$  množica dopustnih rešitev
- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kriterijska funkcija

$x^* \in \Omega$  je optimalna rešitev problema  $(\Omega, f, \max)$ , če velja  
 $\forall x \in \Omega : f(x) \leq f(x^*)$

### Optimizacijski problem



## Linearno programiranje

$(\Omega, f, \min/\max)$  je linearni program, če je  $\Omega$  podana z linearimi enakostmi in neenakostmi ( $\leq, \geq$ ) in je  $f$  linearna (ne dovolimo  $<, >$ ).

### Standardna oblika linearnega programa

Linearni program je v standardni obliki, če iščemo max in so vsi pogojci neenakosti  $\leq$  in so vse spremenljivke nenegativne.

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ \text{p.p.} \quad & a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$c = [c_1 \dots c_n]^T \quad b = [b_1 \dots b_m]^T \quad x = [x_1 \dots x_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Vsek linearen program lahko zapišemo v standardni obliki.

Vse dele linearne programa lahko preoblikujemo tako, da bodo v standardni obliki:

$$\begin{aligned} \min f(x) &\rightsquigarrow \max(-f(x)) \\ f(x) \geq b &\rightsquigarrow -f(x) \leq -b \\ f(x) = b &\rightsquigarrow f(x) \leq b \wedge f(x) \geq b \\ x_i \leq 0 &\rightsquigarrow x_i = -x'_i \\ x_i \gtrless 0 &\rightsquigarrow x_i = x'_i - x''_i \wedge x'_i, x''_i \geq 0 \end{aligned}$$

( $\gtrless$  je oznaka za neomejeno vrednost)

### Grafično reševanje linearnih programov

Za linearne programs z dvema spremenljivkama lahko narišemo območje, ki ga določajo pogoji. Nato izračunamo gradient kriterijske funkcije in premikamo v smeri gradijenta proti točki, ki je v preseku polporostrovov pogojev in čim dlje od izhodišča.

## Simpleksna metoda

Linearni program zapišemo v standardni obliki. Če je kak  $b_i < 0$ , moramo uporabiti dvofazno simpleksno metodo, sicer nadaljujemo.

Linearni program zapišemo v prvi slovar.

$$\begin{aligned} & \text{1. slovar} \\ & x_{n+1} = b_1 - a_{11} x_1 - \dots - a_{1n} x_n \\ & \vdots \\ & x_{n+m} = b_m - a_{m1} x_1 - \dots - a_{mn} x_n \\ & z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \end{aligned}$$

Vse spremenljivke  $x_1, \dots, x_{n+m}$  so nenegativne.

Spremenljivke na levi so **bazne**, na desni pa **nebazne**.

$x_1, \dots, x_n$  ... **prvotne** spremenljivke

$x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  ... **dopolnilne** spremenljivke

Slovar je **doposten**, če so vse konstante (členi brez  $x$ ) na desni nenegativne.

Če je slovar doposten, ima **bazno** dopustno rešitev: vse **nebazne** spremenljivke so 0 in kriterijska funkcija je tedaj  $z = 0$ .

• Določimo:

- **vstopno spremenljivko**: izberem spremenljivko, ki ima v kriterijski funkciji pozitiven koeficient.
- **pivotno vrstico**: enakost, ki povečanje vstopne spremenljivke najbolj omejuje. Če ni omejena, je problem **neomejen** in končamo.
- **izstopno spremenljivko**: bazna spremenljivka v pivotni vrstici

- Iz pivotne vrstice izrazimo vstopno spremenljivko in pivotno vrstico zamenjamo z izražavo (vstopna spremenljivka gre v bazo na levo stran).
- V ostalih vrsticah in kriterijski funkciji vstopno spremenljivko nadomestimo z zgornjo izražavo.
- Dobimo naslednji slovar. Postopek ponavljamo dokler niso vsi koeficienti v kriterijski funkciji negativni ali enaki 0.

Iz zadnjega slovarja razberemo optimalne rešitve: spremenljivke, ki imajo v kriterijski funkciji negativen koeficient imajo vrednost 0, ostale pa lahko sprememjamamo glede na omejitve.

### Dvofazna simpleksna metoda

Če je  $b \not\geq 0$ , uporabimo dvofazno simpleksno metodo.

### Prva faza

Konstruiramo pomožni problem. V vsaki neenakosti  $b_i$  prištejemo  $x_0$ . Kriterijsko funkcijo pa sprememimo v  $\max -x_0$ .

Iz pomožnega problema zapišemo 1. slovar.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= b_1 + x_0 - a_{11} x_1 - \dots - a_{1n} x_n \\ &\vdots \\ x_{n+m} &= b_m + x_0 - a_{m1} x_1 - \dots - a_{mn} x_n \\ w &= -x_0 \end{aligned}$$

Za vstopno spremenljivko izberemo  $x_0$  za pivotno vrstico pa tisto v kateri je  $b_i$  najmanjši. Nato nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Nadaljujemo z navadno simpleksno metodo in upoštevamo pravilo:  $x_0$  ima prednost med kandidati za izstopno spremenljivko.

Če  $w < 0$ , prvotni problem ni doposten, sicer nadaljujemo z drugo fazo.

## Druga faza

Iz zadnjega slovarja pomežnega problem izbrišemo  $x_0$  in kriterijsko funkcijo originalnega programa izrazimo z nebaznimi spremenljivkami. Nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

## Dualnost pri linearinem programiranju

Vsek linearni program  $P$  ima dualno obliko  $P'$ :

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \implies \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{p.p.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$P'' = P$$

### Šibki izrek o dualnosti - ŠID

$x$  dopustna rešitev za  $P$ ,  $y$  dopustna rešitev za  $P' \implies$

$$c^T x \leq b^T y$$

$x$  dopustna za  $P$ ,  $y$  dopustna za  $P'$  in  $c^T x = b^T y \implies$

$x$  optimalna rešitev  $P$ ,  $y$  optimalna rešitev  $P'$

### Krepki izrek o dualnosti - KID

$x^*$  optimalna rešitev  $P \implies$

optimalna rešitev  $P'$  in  $c^T x^* = b^T y^*$

Linearni program in njegov dual sta lahko:

	nedoposten	neomejen	optimalen
nedoposten	✓	✓	//KID
neomejen	✓	//SID	//SID, KID
optimalen	//KID	//SID, KID	✓

### Dualno dopolnjevanje

Naj bo  $x$  dopustna za  $P$  in  $y$  dopustna za  $P'$  tedaj je:

$x$  optimalna za  $P$  in  $y$  optimalna za  $P' \iff$

$$\forall i = 1, \dots, m : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$

$$\forall j = 1, \dots, n : x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$$

**Ekvivalentno:**  $x$  optimalna za  $P$ ,  $y$  optimalna za  $P' \iff$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i \implies y_i = 0 \quad \forall i$$

in

$$x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \forall j$$

3. Če je kaka  $x_j^* > 0$ , je pripadajoča dualna neenakost v  $P'$  izpolnjena z enakostjo:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = c_j$$

4. Vzamemo enačbe iz 3. koraka in upoštevamo, da so nekateri  $y$  iz 2. koraka enaki 0. Rešimo dobljeni sistem (če ni rešljiv,  $x^*$  ni optimalna).

5. Preverimo ali je dobljena rešitev  $y^*$  dopustna. Če je, sta  $x^*$  in  $y^*$  optimalni.

### Dual spošnega problema

Spošna oblika linearnega programa je manj stroga standardna oblika. Dovolimo, da so pogoj postavljeni  $z \leq$  lahko pa tudi  $z =$ . Poleg tega dovolimo, da nekatere spremenljivke niso omejene z  $x_j \geq 0$ .

Program v splošni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{p.p.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m' \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i = m'+1, \dots, m \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n' \end{array}$$

Njegov dual pa je:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{p.p.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n' \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \forall j = n'+1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m' \end{array}$$

enakost  $\xrightarrow{\text{dual}}$  poljubna spremenljivka

neenakost  $\xrightarrow{\text{dual}}$  nenegativna spremenljivka

### Dualno dopolnjevanje splošnega problema

$x$  dopustna za  $P$

$y$  dopustna za  $P'$

$x$  optimalna za  $P$  in  $y$  optimalna za  $P' \iff$

$$\forall i = 1, \dots, m' : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$

$$\forall j = 1, \dots, n' : x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$$

### Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Naj bo  $P$  linearni program,  $\exists$  neizrojena optimalna rešitev (v zadnjem slovarju so vse konstante  $> 0$ ). Potem  $\exists \varepsilon > 0$ , da velja

$$\Delta z^* = \sum_{i=1}^m y_i^* \Delta b_i$$

kjer je  $y^*$  optimalna rešitev duala,  $\Delta b^*$  spremembna optimalna vrednost,  $\Delta b_i$  pa spremembna dena strani pogojev in  $|\Delta b_i| < \varepsilon$ .

Torej če desni strani pogojev v  $P$  prištejemo dovolj majhen  $\Delta b$ , se optimalna vrednost  $z^*$  programa  $P$  spremeni za  $\Delta z^* = \Delta b^T y^*$ .

$y^*$  nam tedaj da "tržno ceno" dobrin. Če želimo povečati dobrino  $b_i$ , se nam dobicek poveča za  $b_i y_i^*$ . Torej za enoto dobrine  $i$  ne smemo plačati več kot  $y_i^*$ .

## Matrične igre

Igra igrata 2 igralca. Prvi ima  $n$ , drugi pa  $m$  strategij.

**Plačilna matrika** A ima  $n$  vrstic in  $m$  stolpcov. Celica v  $i$ -i vrstici in  $j$ -i stolcu predstavlja znesek, ki ga drugi plača prvemu, če prvi izbere strategijo  $i$ , drugi pa  $j$ . (Če je vrednost negativna, privi plača drugemu.)

Igrala igrata po principu najmanjšega tveganja: izbereta strategijo pri kateri v najslabsem primeru izgubita čim manj.

$$\begin{aligned} 1. \text{ igralec: } & \max_i \min_j a_{ij} =: M_1 \\ 2. \text{ igralec: } & \min_j \max_i a_{ij} =: M_2 \\ & M_1 \leq M_2 \end{aligned}$$

$(i_0, j_0)$  je **sedlo** plačilne matrike  $A$ , če je  $a_{i_0 j_0}$  najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu.

$$A \text{ ima sedlo} \iff M_1 = M_2 = a_{i_0 j_0}$$

Če ima  $A$  sedlo, je  $i_0$  optimalna strategija za prvega,  $j_0$  pa za drugega igralca. V tem primeru je  $(i_0, j_0)$  *Nashovo ravnotežje* in nobenemu igralcu se ne splača spremeniti strategije.

Vrednost igre, če ima sedlo, je enaka sedlu.

## Mešana strategija

Igrala svoje strategije izbirata naključno z verjetnostjo  $x_i$  oziroma  $y_j$ .

$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_n) \quad x_1 \geq 0 \quad x_1 + \dots + x_n = 1 \\ y = (y_1, \dots, y_m) \quad y_1 \geq 0 \quad y_1 + \dots + y_m = 1 \end{aligned}$$

**Matematično upanje** je povprečno izplačilo, če bi igralca igrala veliko iger. Vsako celico v plačilni matriki pomnožimo z verjetnostjo, da bo prišlo do tega izida, in vrednosti seštejemo.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = x^T A y$$

Če 1. igralec igra z neko mešano strategijo  $x$ , je

$$\min_y x^T A y = \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

To pomeni, da se 2. igralec lahko na mešano strategijo optimalno brani z neko **čisto strategijo**  $y = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ .

## Iskanje optimalne strategije

Upoštevajoč, da se na mešano strategijo nasprotnik lahko brani z čisto strategijo, dobimo optimizacijska problema.

$$1. \text{ igralec išče } \max_x \min_y x^T A y = \max_x \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

$$2. \text{ igralec išče } \min_y \max_x x^T A y = \min_y \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j$$

Problema zapišemo kot linerana programa.

1. igralec:

$$\begin{aligned} \max & s \\ \text{p.p.} & - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + s \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

2. igralec:

$$\begin{aligned} \min & t \\ \text{p.p.} & - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j + t \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^m y_j = 1 \\ & y_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Opazimo, da sta si linearna programa dualna. Oba problema sta optimalna in imata enako optimalno vrednost. To je **vrednost/strateško sedlo** igre.

Strategiji  $x^*$  in  $y^*$  sta optimalni  $\iff$  sta dopustni in velja

$$\min_j \sum_{i=0}^n a_{ij} x_i^* = \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^*$$

Igra je **poštena**  $\iff$  ima vrednost 0.

Igra je **simetrična**, če je  $A = -A^T$ . Tedaj ima vrednost 0 in je poštena.

## Poenostavljanje plačilne matrike

Vektor  $x$  dominira  $x'$ , če je  $\forall i : x_i \geq x'_i$ .

Vektorja  $x$  in  $x'$  dominirata  $x''$ , če je  $\forall i : \frac{x_i + x'_i}{2} \geq x''_i$ .

Če  $i$ -i vrstica dominira  $i'$ -i vrstico v plačilni matriki, lahko  $i'$ -i vrstico odstranimo.

Če  $j$ -i stolpec dominira  $j'$ -i stolpec v plačilni matriki, lahko  $j$ -i stolpec odstranimo.

S tem ne spremenišmo optimalne vrednosti.

## Problem razvoza

Imamo usmerjen graf  $G = (V, E)$ .  $G$  je povezan kot neusmerjen graf.

$$\begin{aligned} b_v & \dots \text{ poraba-proizvodnja v vozlišču } v \in V \\ c_e & \dots \text{ cena povezave } e \in E \\ x_e & \dots \text{ količina razvoza na povezavi } e \in E \end{aligned}$$

Poraba mora biti enako velika kot proizvodnja.

$$\sum_{v \in V} b_v = 0$$

Rešitev problema je vrednost razvoza za vsako povezavo  $x_e$ . Da je rešitev dopustna mora veljati

$$\forall e \in E : x_e \geq 0$$

$$\forall v \in V : \sum_{konec(e)=v} x_e - \sum_{začetek(e)=v} x_e = b_v$$

Kriterijska funkcija je vsota cen, ki jih bomo plačali za razvoz. Seveda jo želimo minimizirati.

$$\sum_{e \in E} c_e x_e = c^T x$$

Za problem razvoza lahko zapišemo linearni program in njegov dual.

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{p.p.} & A^T y \leq c \end{array}$$

Kjer je  $A$  incidenčna matrika

$$A = [a_{ve}]_{v \in V, e \in E} \quad a_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{konec}(e) = v \\ -1 & \text{začetek}(e) = v \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Rešitvi  $x$  in  $y$  optimalni  $\iff$

$$\forall ij \in E : x_{ij} = 0 \quad \vee \quad y_j - y_i = c_{ij}$$

## Simpleksna metoda na omrežjih

1. Poisčemo drevesno dopustno rešitev  $x$

2. Rešimo  $y_i + c_{ij} = y_j$  za  $ij \in T$

Začnemo s poljubnim vozliščem  $y_1 = 0$  iz tega lahko izračunamo vrednosti za vsa ostala vozlišča tako, da se premaknemo iz začetnega vozlišča in če gremo po pravi smeri, ceno razvoza povečujemo, sicer pa zmanjšujemo. Če je  $y_i + c_{ij} \geq y_j$  za  $ij \in E \setminus T$ , je  $x$  optimalna rešitev končamo.

3. Če je  $y_i + c_{ij} < y_j$  za kak  $ij \in E \setminus T$ , je  $ij$  vstopna povezava. Dodamo jo v  $T$  in dobimo cikel.

$$t = \min\{x_e : e \text{ obratna}\}$$

Na premih povezavah cikla  $x$  povečamo za  $t$ , na obratnih pa pomanjšamo za  $t$ .

Povezava na kateri je minimum dosežen, je izstopna povezava in jo odstranimo iz drevesa.

Tako dobimo novo vpeto drevo in se vrnemo na korak 2.

Metoda se lahko zacikla. Ciklanju se izognemo tako, da izberemo koren  $r \in V$  in za izstopno povezavo izberemo najbljžjo  $r$ .

## Dvofazna simpleksna metoda na omrežjih

Z njo poiščemo začetno drevesno rešitev oziroma dokažemo, da ne obstaja.

Skonstruiramo pomožen problem tako, da izberemo koren  $r \in V$  in originalnemu problemu dodamo povezave za  $\forall v \in V$ :

- če je  $b_v \geq 0$ , dodamo umetno povezavo  $rv$  (če še ne obstaja), razvoz  $x_{rv} = b_v$ , cena  $c_v = 1$
- če je  $b_v < 0$ , dodamo umetno povezavo  $vr$  (če še ne obstaja), razvoz  $x_{rv} = -b_v$ , cena  $c_v = 1$

Cene originalnih povezav nastavimo na 0.

Rešimo pomožen problem razvoza. Če dobimo rešitev s ceno 0 (ne uporablja pomožnih povezav), je originalni problem doposten in končna drevesna rešitev pomožnega problema je dopustna drevesna rešitev za prvotni problem.

Če je proizvodnja večja kot poraba, problem ni rešljiv, a lahko dodamo smetišče z zadostno porabo in ga z brezplačnimi povezavami povežemo z vozlišči s proizvodnjo.

## Celoštevilski rešitve

Za problem razvoza z  $b_v \in \mathbb{Z}$  velja:

- če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilsko dopustna rešitev
- če obstaja optimalna rešitev, obstaja tudi celoštevilsko optimalna rešitev

## Königov izrek o plesnih parih

Dvojno stohastična matrika je matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  za katero velja:

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i : \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall j : \sum_{i=1}^m a_{ij} = 1$$

Permutacijska matrika je matrika  $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ , ki ima v vsakem stolcu in vrstici natanko eno 1.

Naj bo  $A$  dvojno stohastična matrika, potem obstaja permutacijska matrika  $P$ , da velja  $p_{ij} > 0 \implies a_{ij} > 0$ .

## Königov izrek o plesnih parih

Naj bo  $G$   $r$ -regularen graf, potem obstaja popolno prirejanje.

## Problem razvoza z omejitvami

Imamo usmerjen graf  $G = (V, E)$ .  $G$  je povezan kot neusmerjen graf.

$$b_v \in \mathbb{R} \dots \text{ poraba-proizvodnja v vozlišču } v \in V$$

$$c_e \in \mathbb{R} \dots \text{ cena povezave } e \in E$$

$$u_e \in [0, \infty] \dots \text{ kapaciteta povezave } e \in E$$

$$x_e \in [0, u_e] \dots \text{ količina razvoza na povezavi } e \in E$$

Problem razvoza z omejitvami lahko zapišemo kot linearen program:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax = b \\ & x \leq u \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_e = 0 & \rightarrow \text{prazna povezava} \\ x_e = u_e & \rightarrow \text{nasičena povezava} \end{array}$$

Dopustna rešitev  $x$  je **drevesna dopustna rešitev**, če obstaja vpeto drevo  $T$ , da so vse povezave izven drevesa prazne ali nisičene.

## Postopek reševanja

• Poisčemo začetno dopustno drevesno rešitev  $x$  z drevesom  $T$

• Izračunamo ceno razvoza  $y$  za posamezna vozlišča

• Poisčemo vstopno povezavo  $ij \notin T$ , ki ustreza:

$$\begin{array}{ll} \text{prazna: } x_{ij} = 0, y_i + c_{ij} < y_j & \Rightarrow \\ t = \min\{\{x_e : e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e : e \text{ prema}\}\} \\ \text{na premih povečamo za } t, \text{ na obratnih} & \text{pomanjšamo za } t \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{nisičena: } x_{ij} = u_{ij}, y_i + c_{ij} > y_j & \Rightarrow \\ t = \min\{\{x_e : e \text{ prema}\} \cup \{u_e - x_e : e \text{ obratna}\}\} \\ \text{na premih pomanjšamo za } t, \text{ na obratnih} & \text{povečamo za } t \end{array}$$

Začetno dopustno drevesno rešitev poiščemo s pomožnim problemom:

Izberemo koren  $r \in V$ . Za vsako vozlišče  $v$ :

•  $b_v < 0$  (proizvodnja): Če že obstaja povezava  $vr$  z kapaciteto  $u_{vr} \geq -b_v$ , nastavimo razvoz na tej povezavi na  $b_v$ , sicer dodamo povezavo  $vr$  z kapaciteto  $\infty$  (dovolimo tudi več povezav med vozlišči).

•  $b_v \geq 0$  (poraba): Če že obstaja povezava  $rv$  z kapaciteto  $u_{rv} \geq b_v$ , nastavimo razvoz na tej povezavi na  $-b_v$ , sicer dodamo povezavo  $rv$  z kapaciteto  $\infty$ .

Umetne (dodane) povezav imajo ceno 1, prvotni pa 0. Prvotni problem je doposten  $\iff$  vrednost pomožnega problema enaka 0.

## Dokazi vaje

Velja  $c^T x \leq z^* + t^T y^*$ , kjer b prištejemo t.

## Farkaševa lema

$$Ax = b, x \geq 0 \text{ rešljiv} \iff A^T y \geq 0, b^T y \leq 0 \text{ ni rešljiv.}$$

## Pretoki in prerezi

$G = (V, E)$  ... usmerjen graf  
 $s, t \in V$  ... začetno in končno vozlišče  
 $u_e \in [0, \infty)$  ... kapaciteta povezave

Iščemo pretok  $x_e$ , da veljajo Kirchoffovi zakoni in  $0 \leq x_e \leq u_e$ .

$$\sum_{\text{konec}(e)=v} x_e = \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$$

Radi bi maksimizirali pretok:

$$\sum_{\text{začetek}(e)=s} x_e = \sum_{\text{konec}(e)=t} x_e = v$$

## Prevedba na problem razvoza

$$b_v = 0 \quad \forall v \in V \quad c_e = 0 \quad \forall e \in E$$

$u_e$  ostane nespremenjen

Dodamo povezavo  $ts$  z kapaciteto  $u_{ts} = \infty$  in ceno  $c_{ts} = -1$ .

## Povečujejoča pot

Zaporedje  $s = v_0, v_1, \dots, v_k = t$ , da  $\forall i = 1, \dots, k$  velja:  
 $v_{i-1}v_i \in E, x_{v_{i-1}v_i} < u_{v_{i-1}v_i}$   
 ali  
 $v_iv_{i-1} \in E, x_{v_iv_{i-1}} > 0$

Pretok na premih povezavah povečujejoče poti povečamo za  $\varepsilon$  na obratnih pa pomanjšamo.

$$\varepsilon = \min\{x_e : e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e : e \text{ prema}\}$$

## Prerez

Podmnožica  $C \subseteq V$  je prerez, če velja  $s \in C$  in  $t \notin C$ . Kapaciteta prerez je:

$$\sum_{\substack{i \in C \\ j \notin C}} u_{ij} \in [0, \infty)$$

Prostornina pretoka  $\leq$  kapaciteta prerez.

Če je prostornina pretoka = kapaciteti prerez, je pretok maksimalen in prerez minimalen.

Za problem pretoka velja natanko eno:

- neomejen: kapaciteta vsakega prerez je  $\infty$
- optimalen:  $\exists$  prerez katerega kapaciteta je enaka maksimalnemu pretoku

## Prirejanja in pokritja

Naj bo  $G = (V, E)$  graf.

$M \subseteq E$  je prirejanje, če  $\forall e, f \in M, e \neq f \implies e \cap f = \emptyset$   
 $P \subseteq V$  je pokritje, če  $\forall e \in E \exists v \in P : v \in e$

$\mu(G)$  = velikost največjega prirejanja  
 $\tau(G)$  = velikost najmanjšega pokritja

$M$  prirejanje,  $P$  pokritje  $\implies |M| \leq |P|$

Če je  $|M| = |P|$ , je  $M$  največje prirejanje in  $P$  najmanjše pokritje in  $\mu(G) = \tau(G) = |M| = |P|$ .

Prirejanje je maksimalno, če ni vsebovano v nobenem večjem prirejanju.

V splošnem velja le  $\mu(G) \leq \tau(G)$ , za dvodelne grafe pa  $\mu(G) = \tau(G)$ .

$e \in E$  je vezana, če  $e \in M$ , sicer pa je prosta  
 $v \in V$  je vezano, če  $\exists e \in M : v \in e$ , sicer pa je prosto

Alternirajoča pot je pot na kateri se izmenjujejo proste in vezane povezave.

Povečujejoča pot je alternirajoča pot, ki se začen in konča v prostem vozlišču.

Če na povečujejoči poti zamenjamo proste in vezane povezave, dobimo za 1 večje prirejanje.

$M$  je največje prirejanje  $\iff$  ne obstaja povečujejoča pot.

## Madžarska metoda

$G = (V, E)$  dvodelni graf,  $V = X \cup Y, M$  prirejanje

$S = \{\text{prosta vozlišča v } X\} \quad T = \emptyset$

Vsek korak:

$$S' = S \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{vozlišča v } X, \text{ do katerih lahko iz } T \\ \text{pridemo po vezanih povezavah} \end{array} \right\}$$

$$T' = T \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{vozlišča v } Y, \text{ do katerih lahko iz } S' \\ \text{pridemo po prostih povezavah} \end{array} \right\}$$

Če  $T$  vsebuje prosto vozlišče, imamo povečujejočo pot, ki jo uporabimo za povečanje prirejanja.

Sicer pa pridemo do koraka kjer je  $T' = T$  in  $S' = S$ . V tem primeru je  $M$  največje prirejanje.

## Hallov izrek

$G = (V, E)$  dvodelni graf,  $V = X \cup Y$

$\exists$  popolno prirejanje iz  $X$  v  $Y \iff \forall A \subseteq X : |A| \leq |N(A)|$

## Madžarska metoda z utežmi

Imamo plon graf  $K_{n,n}$ ; povezava med  $x_i$  in  $y_j$  ima utež  $c_{ij}$

$$c = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Popolno prirejanje je podano z  $\pi \in S_n$ :  $x_i \sim y_{\pi(i)}$ .

Iščemo prirejanje z najmanjšo utežjo:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{\pi(i), i}$$

Interpretacija: Razporeditev  $n$  opravi n ljudem.

## Madžarska metoda - postopek

- Od vsake vrstice odštejemo njen minimum.  
 Od vsakega stolpca odštejemo njegov minimum.  $V$  vsaki vrstici in stolpcu je vsaj ena ničla
  - Pokrijemo vse ničle v matriki pokrijemo z manj kot  $n$  vrsticami in stolpci.
- $\varepsilon :=$  najmanjše nepokrito polje  $> 0$
- $\bullet$   $2 \times$  pokritim poljem prištejemo  $\varepsilon$
  - $\bullet$  nepokritim pa odštejemo  $\varepsilon$
- Če ne najdemo takih vrstic in stolpcev, lahko najdemo  $n$  ničel v različnih vrsticah in stolpcih. To nam daje minimalno popolno prirejanje.

## Iskanje najkrajše poti

### Pregled v širino (BFS) $O(|V| + |E|)$

vhod: neutzen, neusmerjen graf  $G$ , zacetno vozlišče  $r$   
 izhod: razdalje med vozliščem  $r$  in ostalimi

$$d(r) \leftarrow 0$$

$$\pi(r) \leftarrow \text{NULL}$$

$$\text{obiskan}(r) \leftarrow \text{NE}$$

$$\text{za vsak } v \in V \setminus \{r\}:$$

$$d(v) \leftarrow \infty$$

$$\pi(v) \leftarrow \text{NULL}$$

$$\text{obiskan}(v) \leftarrow \text{NE}$$

dokler  $Q \neq \emptyset$ :

$$v \in Q$$

$$Q \leftarrow Q \setminus v$$

$$\text{obiskan}(v) \leftarrow \text{JA}$$

za vsak  $u \in N(v)$ :

$$\text{ce obiskan}(u) = \text{NE}:$$

$$d(u) \leftarrow d(v) + 1$$

$$\pi(u) = v$$

$$Q \leftarrow Q \cup \{u\}$$

vrni  $d, \pi$

## Dijkstrov algoritem

vhod: usmerjen, utezen ( $w_e \geq 0$ ) graf  $G = (V, E)$ , koren  $r$   
 izhod: razdalje med vozlišcem  $r$  in ostalimi

$$d(r) \leftarrow 0$$

$$\pi(r) \leftarrow \text{NULL}$$

$$\text{za vsak } v \in V \setminus \{r\}:$$

$$d(v) \leftarrow \infty$$

$$\pi(v) \leftarrow \text{NULL}$$

$$Q \leftarrow V$$

dokler  $Q \neq \emptyset$ :

$$v \leftarrow \text{element } Q \text{ z min } d$$

$$Q \leftarrow Q \setminus v$$

$$\text{ce } d(v) = \infty:$$

končamo

sicer :

$$\text{za vsak } u \in N(v) \cap Q:$$

$$\text{ce } d(u) > d(v) + w_{vu}:$$

$$d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}$$

$$\pi(u) \leftarrow v$$

vrni  $d, \pi$

vhod: usmerjen graf  $G = (V, E)$  brez ciklov

izhod: topoloska urejenost  $\varphi$

za vsak  $v \in V$ :

$$\text{st}(v) \leftarrow \deg^+(v)$$

$$i \leftarrow 1$$

dokler  $\exists v \in V : \text{st}(v) = 0$ :

$$\varphi(v) \leftarrow i$$

za vse  $vu \in E$ :

$$\text{st}(u) \leftarrow \text{st}(u) - 1$$

$$i \leftarrow i + 1$$

ce  $i \leq |V|$ :

vrni FALSE

sicer :

vrni  $\varphi$

vhod: topoloska urejenost  $\varphi$ , koren  $r$

izhod: razdalje med vozlišcem  $r$  in ostalimi

$$d(r) \leftarrow 0$$

$$\pi(r) \leftarrow \text{NULL}$$

za vsak  $v \in V \setminus \{r\}$ :

$$d(v) \leftarrow \infty$$

$$\pi(v) \leftarrow \text{NULL}$$

$$i \leftarrow \varphi(r)$$

za vsak  $j \in \{i, i+1, \dots, |V|\}$ :

$$v \leftarrow \varphi^{-1}(j)$$

za vsak  $vu \in E$ :

$$\text{ce } d(u) = d(v) + w_{ue}:$$

$$d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}$$

$$\pi(u) \leftarrow v$$

vrni  $d, \pi$

Bellman-Ford

## Floyd-Warshellov algoritem

## Konveksna optimizacija

### Afine množice

Množica  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$  je afina, če velja:

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

Premica med dvema poljibnima točkama iz  $A$  mora biti vsebovana v  $A$ .

### Afina kombinacija:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$$

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- $A$  je afina

- vsaka afina kombinacija vektorjev iz  $A$  je v  $A$

- $A = V + a = \{v + a \mid v \in V\}$

za nek  $V \in \mathbb{R}^n$  linearen podprostor in  $a \in \mathbb{R}^n$

## Konveksne množice

Množica  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je konveksna, če velja:

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

Daljica med dvema poljibnima točkama iz  $A$  mora biti vsebovana v  $A$ .

Množica ni konveksna, če

$$\exists x, y \in A \quad \exists \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)x + \lambda y \notin A$$

Naj bo  $\Omega^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konv. fun.

Tedaj je  $D = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \leq 0 \ \forall i\}$  konveksna.

### Konveksna kombinacija:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 0$$

Afin podprostor (= zaprt za affine kombinacije = premaknjeni linearen prostor) je konveksen.

Presek konveksnih množic  $A_i, \forall i \in I$  je konveksen.

Unija konveksnih množic pa ni nujno konveksna.

A konveksna  $\iff$  poljubna konveksna kombinacija vektorjev iz  $A$  v  $A$ .

### Konveksna ogrinjača:

$$\text{Conv}(A) = \mathcal{C}(A) = \bigcap_{\substack{K \text{ konv.} \\ A \subseteq K}}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, x_i \in A \right\}$$

- $A \subseteq \text{Conv}(A)$

- $\text{Conv}(A)$  je konveksna

- $A$  konveksna  $\implies \text{Conv}(A) = A$

- $A \subseteq B, B$  konveksna  $\implies \text{Conv}(A) \subseteq B$

- $\text{Conv}(A) = \{\text{konveksna kombinacija vektorjev iz } A\}$

Ekstremna točka:  $a \in A^{\text{konv}}$  je ekstremna, če

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in [0, 1] : a = (1 - \lambda)x + \lambda y$$

Točka ni ekstremna, če laži v notranjosti kakih doljic med točkama iz  $A$ .

Ekstremne točke vedno ležijo na robu. Robne točke pa niso nujno ekstremne.

## Konveksni stožci

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  je konveksni stožec, če

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \geq 0 : \lambda x + \mu y \in A$$

Konveksni stožec, je konveksna množica, ni pa nujno obratno.

Vsi linearni podprostor je konveksen stožec.

Konveksni stožec napet na  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ :

$$S(a_1, \dots, a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0\}$$

### Dualni stožec

množice  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T a \geq 0 \ \forall a \in A\}$$

$V A^*$  so vektorji, ki z vsemi vektorji iz  $A$  tvorijo ostri kot.

$$A \subseteq A^{**}$$

## Farkaševa lema

### Geometrijska oblika:

$$S^{**}(a_1, \dots, a_n) = S(a_1, \dots, a_n)$$

### Algebraična oblika:

Prva varianta:

$$\begin{aligned} \exists x \geq 0 : Ax = b &\iff \forall y : A^T y \geq 0 \implies b^T y \geq 0 \\ b \in S(a_1, \dots, a_n) &\iff b \in S^{**}(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Druga varianta:

$$\exists x \geq 0 : Ax \leq b \iff \forall y \geq 0 : A^T y \geq 0 \implies b^T y \geq 0$$

## Konveksne funkcije

Naj bo  $K^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ; funkcija  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  je konveksna, če

$$\forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1] :$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Funkcija je konveksna, če je definirana na konveksnem območju in graf vedno leži pod zveznicno dveh točk na grafu.

Če zgoraj velja stroga neenakost, je funkcija **strogo konveksna**.

$$f \text{ strogo konveksna} \iff H_f > 0.$$

Če ima strogo konveksna funkcija maksimum, je v *ekstremni točki*.

## Konkavne funkcije

Naj bo  $K^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ; funkcija  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  je konkavna, če

$$\forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1] :$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Če je  $f$  konveksna, je  $-f$  konkavna.

Funkcija  $f$  je **afina**  $\iff$  konveksna in konkavna

- $f : K \rightarrow \mathbb{R}, c \geq 0, f$  konveksna  $\implies c \cdot f$  konveksna
- $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}, f, g$  konveksni  $\implies f + g$  konveksna
- $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  afina  $\implies g(K)$  konveksna
- $f : g(K) \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna  $\implies f \circ g$  konveksna
- $g : K \rightarrow \mathbb{R}, f : \text{Conv}(g(K)) \rightarrow \mathbb{R}, f, g$  konveksni
- $f$  naraščajoča  $\implies f \circ g$  konveksna

## Konveksne funkcije in optimizacija

Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

- $f$  ima v  $x \in A$  **globalni maksimum**, če

$$\forall x' \in A : f(x) \geq f(x')$$

- $f$  ima v  $x \in A$  **lokalni maksimum**, če

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x' \in A \cap K_\varepsilon(x) : f(x) \geq f(x')$$

Če je  $x$  lokalni minimum konveksne funkcije, je tudi globalni minimum.

## Preverjanje konveksnosti funkcije

### S prvim odvodom

$f : K^{\text{konv}}, \text{odp} \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva

$$f \text{ konveksna} \iff f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^T (y - x)$$

### Z drugim odvodom

$f : \Omega^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dvakrat zvezno odvedljiva

Hessejeva matrika:

$$H_f = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$$

$$f \text{ konveksna} \iff H_f \geq 0$$

$$\begin{aligned} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ konveksna} &\iff h_{x,y} : I_{x,y} \rightarrow \mathbb{R}, \\ h_{x,y}(\lambda) = f(x + \lambda y), \text{ konveksna za } \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ I_{x,y} = \{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda y \in \Omega\} \end{aligned}$$

**Lastne vrednosti** matrike  $A$  so ničle karakterističnega polinoma  $\det(A - \lambda I)$ .

**Lastni podprostor** vrednosti  $\lambda$  je  $\text{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ .

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je **diagonalizabilna**, če ima  $n$  linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Tedaj je  $A = PDP^{-1}$ , kjer je  $D$  diagonalna z lastnimi vrednostmi na diagonali,  $P$  pa obrnjiva z lastnimi vektorji v stolpcih.

Če je  $A$  **simetrična** ( $A^T = A$ ), so vse lastne vrednosti realne in  $A$  je diagonalizabilna v ortonormirani bazi (lastni vektorji različnih lastnih vrednosti so  $\perp$ ).

Matrika  $A$  je **pozitivno semidefinitna** ( $A \geq 0$ )

$$\iff \text{vse lastne vrednosti } \lambda \geq 0$$

$$\iff x^T Ax = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0$$

$$\iff \text{vse glavne poddeterminante} \geq 0$$

Glavne poddeterminante dobimo tako, da izbiršemo nekatere vrstice in stolpce z enakimi indeksi.

$$\text{Matrika } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ je } A \geq 0 \iff ac - b^2 \geq 0 \text{ in } a \geq 0$$

## Konveksne funkcije in vezani ekstremi

$\Omega \subseteq \mathbb{R}$  odprta

$$\begin{aligned} f, g_1, \dots, g_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ zvezno odvedljive} \\ D = \{x \in \Omega : g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{p.p.} & x \in \Omega^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \leq 0 \end{array}$$

## Karush–Kuhn–Tuckerjevi pogoji

### Lagrangeeva funkcija

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$$

$x^* \in \Omega$  zadošča pogojem KKT, če  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ , da velja:

$$L_{x_i}(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$$g_j(x^*) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

V splošnem KKT pogoji niso ne potrebni ne zadostni za globalni/lokalni ekstrem.

### Potrebnost pogojev KKT optimalnost:

Če ima  $f$  v točki  $x^* \in D$  lokalni min na  $D$  in so vezi v  $x^*$  regularne, točka  $x^*$  zadošča pogojem KKT.

### Zadostni pogoji za regularnost vezi:

Če velja vsaj en od pogojev so vezi v  $x^*$  regularne.

- $g_1, \dots, g_m$  affine

- $\Omega$  konveksna,  $f, g_1, \dots, g_m$  konveksne in notranjost  $D^\circ \neq \emptyset$

- vse množice vektorjev  $\{\nabla g_i(x^*) \mid g_i(x^*) = 0\}$  linearno neodvisne

### Zadostnost pogojev KKT za optimalnost:

$\Omega$  odprta, konveksna množica,  $f, g_1, \dots, g_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konveksne in odvedljive

Če  $x^*$  ustreza KKT pogojem, je globalni minimum.

Za konveksni problem  $D^\circ \neq \emptyset$  so KKT pogoji  $\iff x^*$  globalni minimum.

## Celoštevilski linearni programi

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Če želimo, da je  $\delta = 1$  natanko tedaj ko je  $x > 0$ , dodamo pogoj:

$$\frac{x}{M} \geq \delta \geq Mx \quad \delta \in \{0, 1\}$$

Kjer je  $M$  neko dovoj veliko število, da je vedno  $\frac{x}{M} \leq 1$ .

Za  $\delta_i \in \{0, 1\}$  se logični izrazi lahko pretvorijo v pogoje:

$$\delta_1 = 1 \vee \delta_2 = 1 \iff \delta_1 + \delta_2 \geq 1$$

$$\delta_1 = 1 \wedge \delta_2 = 1 \iff \delta_1 \geq 1, \delta_2 \geq 1$$

$$\delta_1 = 1 \implies \delta_2 = 1 \iff 1 - \delta_1 + \delta_2 \geq 1, \delta_2 \geq \delta_1$$