

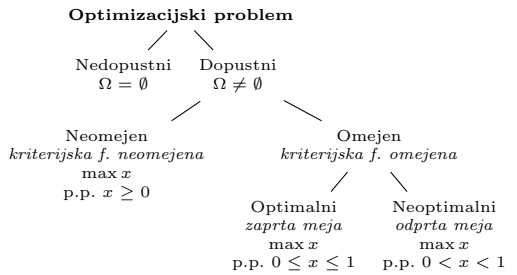
Optimizacijske naloge

Optimizacijska naloga je $(\Omega, f, \max/\min/\sup/\inf,)$ kjer je:

- Ω množica dopustnih rešitev
- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kriterijska funkcija

$x^* \in \Omega$ je *optimalna* rešitev problema $(\Omega, f, \max)$, če velja

$$\forall x \in \Omega : f(x) \leq f(x^*)$$



Linearno programiranje

$(\Omega, f, \min/\max)$ je linearni porgram, če je Ω podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi ($\leq, \geq$) in je f linearna (*ne dovolimo* $<, >$).

Standardna oblika linearnega pograma

Linearni porgram je v *standardni* obliki, če iščemo $\max$ in so vsi pogoji neenakosti $\leq$ in so vse spremenljivke nenegativne.

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{p.p.} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$c = [c_1 \ldots c_n]^T \quad b = [b_1 \ldots b_m]^T \quad x = [x_1 \ldots x_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Vsak linearen program lahko zapišemo v standardni obliki.

Vse dele linearnega programa lahko preoblikujemo tako, da bodo v standardni obliki:

$$\begin{array}{l} \min f(x) \rightsquigarrow \max(-f(x)) \\ f(x) \geq b \rightsquigarrow -f(x) \leq -b \\ f(x) = b \rightsquigarrow f(x) \leq b \wedge f(x) \geq b \\ x_i \leq 0 \rightsquigarrow x_i = -x_i' \\ x_i \geq 0 \rightsquigarrow x_i = x_i' - x_i'' \wedge x_i', x_i'' \geq 0 \end{array}$$

($\gtrless$ je oznaka za *neomejeno vrednost*)

Grafično reševanje linearnih programov

Za linearne porgame z dvema spremenljivkama lahko narišemo območje, ki ga določajo pogoji. Nato izračunamo gradient kriterijske funkcije in premikamo v smeri gradienta proti točki, ki je v preseku polporostorov pogojev in čim dlje od izhodišča.

Simpleksna metoda

Linearni program zapišemo v standardni obliki. Če je kak $b_i < 0$, moramo uporabiti **dvofazno simpleksno metodo**, sicer nadaljujemo.

Linearni porgram zapišemo v *prvi* slovar.

$$\begin{array}{l} \overbrace{x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n}^{1. \text{ slovar}} \\ \vdots \\ \overbrace{x_{n+m} = b_m - a_{m1}x_1 - \cdots - a_{mn}x_n} \\ z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \end{array}$$

Vse spremenljivke $x_1, \ldots, x_{n+m}$ so nenegativne.

Spremenljivke na levi so **bazne**, na desni pa **nebazne**.

$$\begin{array}{ll} x_1, \ldots, x_n & \ldots \quad \textbf{prvotne} \text{ spremenljivke} \\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} & \ldots \quad \textbf{dopolnilne} \text{ spremenljivke} \end{array}$$

Slovar je **dopusten**, če so vse konstante (čelni brez x) na desni nenegativne.

Če je slovar dopusten, ima *bazno* dopustno rešitev: vse *nebazne* spremenljivke so 0 in kriterijska funkcija je tedaj $z = 0$.

- Določimo:
 - vstopno spremenljivko**: izberem spremenljivko, ki ima v kriterijski funkciji pozitiven koeficient.
 - pivotno vrstico**: enakost, ki povečanje vstopne spremenljivke najbolj omejuje. Če ni omejena, je problem **neomejen** in končamo.
 - izstopno spremenljivko**: bazna spremenljivka v pivotni vrestici

- Iz pivotne vrstice izrazimo vstopno spremenljivko in pivotno vrstico zamenjamo z izražavo (vstopna spremenljivka gre v bazo na levo stran).
- V ostalih vrsticah in kriterijski funkciji vstopno spremenljivko nadomestimo z zgornjo izražavo.
- Dobimo naslednji slovar. Postopek ponavljamo dokler niso vsi koeficienti v kriterijski funkciji negativni ali enaki 0.

Iz zadnjega slovarja razberemo optimalne rešitve: spremenljivke, ki imajo v kriterijski funkciji negativen koeficient imajo vrednost 0, ostale pa lahko spreminjamo glede na omejitve.

Dvofazna simpleksna metoda

Če je $b \not\geq 0$, uporabimo dvofazno simpleksno metodo.

Prva faza

Konstruiramo pomožni problem. V vsaki neenakosti b_i prištejemo x_0 . Kriterijsko funkcijo pa spremenimo v $\max -x_0$.

Iz pomožnega problema zapišemo 1. slovar.

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = b_1 + x_0 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \overbrace{x_{n+m} = b_m + x_0 - a_{m1}x_1 - \cdots - a_{mn}x_n} \\ w = -x_0 \end{array}$$

Za vstopno spremenljivko izberemo x_0 za pivotno vrstico pa tisto v kateri je b_i najmanjši. Nato nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Nadaljujemo z navadno simpleksno metodo in upoštevamo pravilo: x_0 ima prednost med kandidati za izstopno spremenljivko.

Če $w^* < 0$, prvotni problem ni dopusten, sicer nadlajujemo z drugo fazo.

Druga faza

Iz zadnjega slovarja pomežnega problem izbrisemo x_0 in kriterijsko funkcijo originalnega programa izrazimo z nebaznimi spremenljivkami. Nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Dualnost pri linearnem programiranju

Vsak linearni program P ima dualno obliko P' :

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \implies \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{p.p.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$P'' = P$$

Šibki izrek o dualnosti - ŠID

x dopustna rešitev za P , y dopustna rešitev za P' $\implies$

$$c^T x \leq b^T y$$

x dopustna za P , y dopustna za P' in $c^T x = b^T y \implies$
 x optimalna rešitev P , y optimalna rešitev P'

Krepki izrek o dualnosti - KID

x^* optimalna rešitev $P \implies$

$$\text{optimalna rešitev } P' \text{ in } c^T x^* = b^T y^*$$

	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓	//KID
neomejen	✓	//ŠID	//ŠID, KID
optimalen	//KID	//ŠID, KID	✓

Dualno dopolnjevanje

Naj bo x dopustna za P in y dopustna za P' tedaj je:

x optimalna za P in y optimalna za P' $\iff$

$$\forall i = 1, \ldots, m : \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$

$$\forall j = 1, \ldots, n : \quad \quad \quad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$$

$$\forall j = 1, \ldots, n' : \quad \quad \quad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$$

Ekvivalentno: x optimalna za P , y optimalna za P' $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i \implies y_i = 0 \quad \forall i \\ \text{in} \\ x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \quad \forall j \end{array}$$

Uporaba izreka o dualnem dopolnjevanju

Želimo dokazati, da je x^* optimalna rešitev linearnega programa P .

- Preverimo, da je x^* dopustna rešitev.
- Če je kakšna neenakost pri pogojih P izpolnjena s strogo neenakostjo, je pripadajoča dualna spremenljivka $y_i^* = 0$.

3. Če je kaka $x_j^* > 0$, je pripadajoča dualna neenakost v P' izpolnjena z enakostjo:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i = c_j$$

4. Vzamemo enačbe iz 3. koraka in upoštevamo, da so nekateri y iz 2. koraka enaki 0. Rešimo dobljeni sistem (če ni rešljiv, x^* ni optimalna).

5. Preverimo ali je dobljena rešitev y^* dopustna. Če je, sta x^* in y^* optimalni.

Dual splošnega problema

Splošna oblika linearnega programa je manj stroga standardna oblika. Dovolimo, da so pogoji postavljeni $z \leq$ lahko pa tudi $z =$. Poleg tega dovolimo, da nekatere spremenljivke niso omejene z $x_j \geq 0$.

Program v splošni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{p.p.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m' \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i = b_i \quad \forall i = m' + 1, \ldots, m \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n' \end{array}$$

Njegov dual pa je:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{p.p.} & \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \ldots, n' \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \forall j = n' + 1, \ldots, n \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{enakost} & \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} \text{poljubna spremenljivka} \\ \text{neenakost} & \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} \text{nenegativna spremenljivka} \end{array}$$

Dualno dopolnjevanje splošnega problema

x dopustna za P
 y dopustna za P'
 x optimalna za P in y optimalna za P' $\Leftrightarrow$

$$\forall i = 1, \ldots, m' : \quad \quad \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$

$$\forall j = 1, \ldots, n' : \quad \quad \quad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$$

$$\forall j = 1, \ldots, n' : \quad \quad \quad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$$

Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Naj bo P linearni program, $\exists$ neizrojena optimalna rešitev (v zadnjem slovarju so vse konstante > 0). Potem $\exists \varepsilon > 0$, da velja

$$\Delta z^* = \sum_{i=1}^m y_i^* \Delta b_i$$

kjer je y^* optimalna rešitev duala, Δz^* sprememba optimalne vrednosti, Δb_i pa sprememba dense strani pogojev in $|\Delta b_i| < \varepsilon$.

Torej če desni strani pogojev v P prištejemo dovolj majhen Δb , se optimalna vrednost z^* programa P spremeni za $\Delta z^* = \Delta b^T y^*$.

y^* nam tedaj da “tržno ceno” dobrin. Če želimo povečati dobroto b_i , se nam dobiček poveča za $b_i y_i^*$. Torej za enoto dobrine i ne smemo plačati več kot y_i^* .

